
Neutrosophic Computing and Machine Learning, Vol. 31, 2024


University of New Mexico 

Fundamentos de Topologías de Vanguardia (artículo de revisión parcial)

Fundamentals of Vanguard Topologies (partial review article)

Florentin Smarandache [1]

[1] Universidad de Nuevo México, División de Matemáticas, Física y Ciencias Naturales
705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, EE. UU. **E-mail:** smarand@unm.edu

Resumen. Recientemente hemos encontrado nueve nuevas topologías: Topología No Estándar, Mayor Extensión de la Topología Real No Estándar, Topologías Débiles/Fuertes de Triplete Neutrosófico, Topologías Débiles/Fuertes de Triplete Neutrosófico Extendido, Topología de Dupla Neutrosófica, Topología de Dupla Neutrosófica Extendida, Topología de Multi Conjunto Neutrosófico, y recordamos y mejoramos las siete topologías previamente fundadas en los años (2019-2023), a saber: Topología Neutrosófica No Estándar, Neutro Topología, Anti Topología, Topología Neutrosófica Refinada, Topología Nítida Neutrosófica Refinada, Super Hiper Topología y Super Hiper Topología Neutrosófica. Se llaman topologías de vanguardia debido a sus formas innovadoras.

Summary. We have recently found nine new topologies: Non-Standard Topology, Further Extension of Real Non-Standard Topology, Weak/Strong Neutrosophic Triplet Topologies, Weak/Strong Neutrosophic Extended Triplet Topologies, Neutrosophic Dupla Topology, Neutrosophic Extended Dupla Topology, Neutrosophic Multi Set Topology, and we recall and improve the previously founded seven topologies in the years (2019-2023), viz: Non-Standard Neutrosophic Topology, Neutrosophic Topology, Anti Topology, Refined Neutrosophic Topology, Refined Neutrosophic Sharp Topology, Super Hyper Topology and Super Hyper Neutrosophic Topology. They are called state-of-the-art topologies because of their innovative shapes.

Palabras clave: Topología Clásica, Espacio Topológico, NeutroSoficación, AntiSoficación, NeutroTopología, AntiTopología, Topología Neutrosófica Refinada, Topología Nítida Neutrosófica Refinada, Super Hiper Topología, Neutro Super Hiper Topología, Conjunto Real No Estándar Extendido, Topología No Estándar, Topología Neutrosófica No Estándar, Topología Neutrosófica No Estándar Extendida más Grande; monada izquierda, monada derecha, binada perforada, monada izquierda cerrada a la derecha, monada derecha cerrada a la izquierda, binada no perforada, SobreTopología Neutrosófica, InfraTopología Neutrosófica, ExtraTopología Neutrosófica, (Difusa y Difusa-Extensiones) Sobre/Infra/Extra-Topologías, Topología Multi Conjunto Neutrosófica.

Keywords: Classical Topology, Topological Space, NeutroSofication, AntiSofication, NeutroTopology, AntiTopology, Refined Neutrosophic Topology, Refined Neutrosophic Crisp Topology, Super Hyper Hyper Topology, Neutro Super Hyper Topology, Extended Non-Standard Real Set, Non-Standard Topology, Non-Standard Neutrosophic Topology, Largest Extended Non-Standard Neutrosophic Topology; Left Monad, Right Monad, Perforated Binned, Left Closed Right Monad, Right Closed Left Monad, Non-Perforated Binned, Neutrosophic OverTopology, Neutrosophic InfraTopology, Neutrosophic ExtraTopology, (Fuzzy and Fuzzy-Extensions) Over/Infra/Extra-Topologies, Neutrosophic Multi-Set Topology.

1 Introducción

La base de nuevas topologías surgieron del desarrollo de otros campos como Neutro Álgebra y Anti Álgebra (que dieron origen a la NeutroTopología y la AntiTopología), Super Hiper Álgebra y Neutro Super Hiper Álgebra (que dieron origen a la Super Hiper Topología y la Neutro Super Hiper Topología), Conjunto Nítido Refinado (que dio origen a la Topología Nítida Refinada), y Conjunto Neutrosófico Refinado (que dio origen a la Topología Neutrosófica Refinada), y Conjunto No Estándar (que da origen a la Topología No Estándar y la Topología Neutrosófica No Estándar), Conjunto de Triplete Neutrosófico, Conjunto de Triplete Neutrosófico Extendido, Conjunto Neutrosófico Dual, Conjunto Neutrosófico Dual Extendido, y Conjunto Neutrosófico Multi Conjunto.

Este es casi un territorio virgen ya que se ha hecho poca investigación al respecto, principalmente sobre la AntiTopología [8]. Sin embargo, es un campo prometedor para estudiar en el futuro, ya que refleja mejor nuestro mundo real, donde las leyes (axiomas) no se aplican en el mismo grado para todas las personas (las personas poderosas están por encima de la ley, otras son inmunes a la ley, y muchos sienten todo el peso de la ley); ya que el mundo como un sistema dinámico está formado por subsistemas, y cada subsistema por sub-subsistemas y así sucesivamente (de ahí la necesidad de introducir la Super Hiper Estructura basada en el n-ésimo Conjunto Potencia de un Conjunto, cuyos casos particulares son la Super Hiper Álgebra y la Super Hiper Topología), etc.

Recordamos la definición clásica de Topología, luego los procedimientos de NeutroSoficación y respectivamente AntiSoficación de la misma, lo que resulta en la adición de dos nuevos tipos de topologías: Neutro Topología y AntiTopología respectivamente.

Luego definimos la topología en un Conjunto Neutrosófico Refinado (2013), Conjunto Nítido Neutrosófico Refinado [3]. Después, extendemos la topología en el marco de la Super Hiper Álgebra [6], luego el Conjunto Neutrosófico No Estándar a la Topología No Estándar y la Neutro Topología No Estándar (nunca antes definidas).

Se presentan los espacios topológicos neutrosóficos correspondientes.

Esta investigación es una mejora del documento [7] y el libro [12, secciones 4.8 y 4.9].

2. Topología Clásica

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío y P($\mathcal{U}$) el conjunto potencia de $\mathcal{U}$.

Sea $\tau \subseteq P(\mathcal{U})$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Entonces τ se llama Topología Clásica en $\mathcal{U}$ si satisface los siguientes axiomas:

(CT-1) ϕ y $\mathcal{U}$ pertenecen a τ.

(CT-2) La intersección de cualquier número finito de elementos en τ está en τ.

(CT-3) La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en τ está en τ.

Los tres axiomas son totalmente (100%) verdaderos (o T = 1, I = 0, F = 0). Simplemente los llamamos *axiomas* (clásicos).

Entonces ($\mathcal{U}$,τ) se llama *Espacio Topológico Clásico* en $\mathcal{U}$.

3. NeutroSoficación de los Axiomas Topológicos

La NeutroSoficación de los axiomas topológicos implica que los axiomas se vuelven parcialmente verdaderos, parcialmente indeterminados y parcialmente falsos. Se les llama *Neutro Axiomas*.

(NCT-1) O bien $\{\phi \notin \tau$ and $\mathcal{U} \in \tau\}$o $\{\phi \in \tau$ and $\mathcal{U} \notin \tau\}$

(NCT-2) Existen un número finito de elementos en τ cuya intersección pertenece a τ (grado de verdad *T*); y un número finito de elementos en τ cuya intersección es indeterminada (grado de indeterminación *I*); y un número finito de elementos en τ cuya intersección no pertenece a τ (grado de falsedad *F*); donde $(T, I, F) \notin \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ ya que (1, 0, 0) representa la Topología Clásica, mientras que (0, 0, 1) representa la Anti Topología.

(NCT-3) Existen un número finito o infinito de elementos en τ cuya unión pertenece a τ (grado de verdad *T*); y un número finito o infinito de elementos en τ cuya unión es indeterminada (grado de indeterminación *I*); y un número finito o infinito de elementos en τ cuya unión no pertenece a τ (grado de falsedad *F*); donde, por supuesto, $(T, I, F) \notin \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

4. AntiSoficación de los Axiomas Topológicos Clásicos

AntiSoficación de los axiomas topológicos significa negar (anti) los axiomas, los cuales se vuelven totalmente (100%) falsos (o T = 0, I = 0, F = 1). Se les llama Anti Axiomas.

(AAT-1) $\phi \notin \tau$ y $\mathcal{U} \notin \tau$.

(AAT-2) La intersección de cualquier número finito (n≥2) de elementos en τ no está en τ.

(AAT-3) La unión de cualquier número finito o infinito (n≥2) de elementos en τ no está en τ.

5. <Topología, NeutroTopología, AntiTopología>

Como tal, tenemos un triplete neutrosófico de la forma:

<Axioma(1, 0, 0), NeutroAxioma(*T, I, F*), AntiAxioma(0, 0, 1)>,

donde (T, I, F)≠ (1, 0, 0) y (T, I, F)≠ (0, 0, 1).

En consecuencia, se tiene:

<Topología, NeutroTopología, AntiTopología>.

Por tanto, en general:

La Topología (Clásica) es una topología que tiene todos los axiomas totalmente verdaderos. Simplemente los llamamos *Axiomas*.

La *NeutroTopología* es una topología que tiene al menos un *NeutroAxioma* y los demás son todos *Axiomas clásicos* [por lo tanto, no hay *AntiAxioma*].

La *AntiTopología* es una topología que tiene uno o más *AntiAxiomas,* sin importar cuáles sean los otros (*Axiomas clásicos* o *NeutroAxiomas*).

6. Teorema sobre el número de Estructuras/Neutro Estructuras/Anti Estructuras

Si una Estructura tiene m axiomas, con m ≥ 1, entonces después de la NeutroSoficación y la AntiSoficación se obtienen 3m tipos de estructuras, categorizados de la siguiente manera:

1 Estructura Clásica + (2m - 1) Neutro Estructuras + (3m - 2m) Anti Estructuras = 3m Estructuras.

7. Consecuencia sobre el número de Topologías/Neutro Topologías/Anti Topologías

Como caso particular del teorema anterior, a partir de una Topología que tiene m = 3 axiomas, se obtienen, después de la NeutroSoficación y la AntiSoficación, 3^3 = 27 tipos de estructuras, como sigue: 1 Topología clásica, 3^3 - 2^3 = 7 NeutroTopologías y 3^3 - 2^2 = 19 AntiTopologías.

1 Topología Clásica + 7 NeutroTopologías + 19 AntiTopologías = 27 Topologías

se presentan a continuación:

Hay 1 (un) tipo de Topología Clásica, cuyos axiomas se enumeran a continuación:

1 Topología Clásica.

$$\begin{pmatrix} CT-1 \\ CT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}$$

8. Definición de NeutroTopología [4, 5]

Es una topología que tiene al menos un axioma topológico que es parcialmente verdadero, parcialmente indeterminado y parcialmente falso, o (T, I, F), donde T = Verdadero, I = Indeterminación, F = Falso, y ningún axioma topológico es totalmente falso, en otras palabras: , donde (1, 0, 0) representa la Topología clásica, mientras que (0, 0, 1) representa la AntiTopología. Por lo tanto, la NeutroTopología es una topología intermedia entre la Topología clásica y la AntiTopología.

Hay 7 tipos de NeutroTopologías diferentes, cuyos axiomas, para cada tipo, se enumeran a continuación:

7 NeutroTopologías

$$\begin{pmatrix} NCT-1 \\ CT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ NCT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ CT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} NCT-1 \\ NCT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ NCT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ CT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} NCT-1 \\ NCT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}.$$

9. Definición de AntiTopología [4, 5]

Es una topología que tiene al menos un axioma topológico que es 100% falso (T, I, F) = (0, 0, 1).

La NeutroTopología y la AntiTopología son casos particulares de la Neutro Álgebra y la Anti Álgebra [4] y, en general, todas son casos particulares de la Neutro Estructura y la Anti Estructura respectivamente, ya que consideramos "Estructura" en cualquier campo del conocimiento [5].

Hay 19 tipos diferentes de AntiTopologías, cuyos axiomas, para cada tipo, se enumeran a continuación:

19 *AntiTopologías*

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ CT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ ACT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ CT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ ACT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ ACT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ACT-1 \\ CT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ NCT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ ACT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ NCT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ ACT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ ACT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ACT-1 \\ NCT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ NCT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ ACT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ CT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ CT-2 \\ NCT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} CT-1 \\ NCT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} NCT-1 \\ ACT-2 \\ CT-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ACT-1 \\ ACT-2 \\ ACT-3 \end{pmatrix}.$$

10. Conjunto Neutrosófico Refinado

Sea U un universo de discurso y R un subconjunto no vacío del mismo,

$$R = \begin{Bmatrix} x\left(T_1(x), T_2(x), \dots, T_p(x)\right); \\ \left(I_1(x), I_2(x), \dots, I_r(x)\right); \\ \left(F_1(x), F_2(x), \dots, F_s(x)\right); \end{Bmatrix}$$

con todos los $T_j, I_k, F_l \in [0,1]$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq l \leq s$, y sin restricción en sus sumas $0 \leq T_m + I_m + F_m \leq 3$, con $1 \leq m \leq max\{p, r, s\}$, donde p, r, $s \geq 0$ son enteros fijos, y al menos uno de ellos es ≥ 2, para garantizar el refinamiento (subpartes) o multiplicidad (multipartes) -dependiendo de la aplicación- de al menos un componente neutrosófico entre *T* (verdad), *I* (indeterminación), *F* (falsedad); y por supuesto $x \in \mathcal{U}$.

Por notación, consideramos que el índice cero significa el conjunto vacío, es decir, $T_0 = I_0 = F_0 = \phi$ (o cero), y lo mismo para las subpartes (o multipartes) faltantes. Por ejemplo, el conjunto Neutrosófico Refinado (2,3,1) abajo es idéntico a un conjunto Neutrosófico Refinado (3,3,3): $(T_1, T_2; I_1, I_2, I_3; F_1) \equiv (T_1, T_2, 0; I_1, I_2, I_3; F_1, 0,0)$, donde los componentes faltantes T_3, y F_2, F_3 fueron reemplazados cada uno por 0 (cero). *R* se llama *conjunto neutrosófico refinado (p, r, s) { o (p, r, s)-RNT }*.

El conjunto neutrosófico ha sido extendido al Conjunto (Lógica y Probabilidad) Neutrosófico Refinado por Smarandache [1] en 2013, donde existen múltiples partes de los componentes neutrosóficos, como T que se dividió en subcomponentes $T_1, T_2, ..., T_p$, e I en $I_1, I_2, ..., I_r$, y F en $F_1, F_2, ..., F_s$, con $p + r + s = n \geq 2$ y enteros $p, r, s \geq 0$ y al menos uno de ellos es ≥ 2 para garantizar el refinamiento (o multiplicidad) de al menos un componente neutrosófico entre T, I, y F.

Aún más: los subcomponentes T_j, I_k, y/o F_l pueden ser conjuntos infinitos contables o no contables en [0, 1].

Esta definición también incluye el *Conjunto Difuso Refinado*, cuando $r = s = 0$ y $p \geq 2$;

y la definición del *Conjunto Difuso Intuicionista Refinado*, cuando r = 0, ya sea $p \geq 2$ y $s \geq 1$, o $p \geq 1$ y $s \geq 2$.

Todos los demás conjuntos de extensión difusa (Conjunto Difuso Pitagórico, Conjunto Difuso Esférico, Conjunto Difuso Fermateano, Conjunto Difuso Ortopar q-Rung, etc.) pueden ser refinados/multiplicados de manera similar.

11. Definición de Topología Neutrosófica Refinada

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y P($\mathcal{U}$) la familia de todos los conjuntos neutrosóficos refinados (*p, r, s*) de $\mathcal{U}$.

Sea $\tau_{RNT} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ una familia de conjuntos neutrosóficos refinados (p, r, s) de $\mathcal{U}$.

Entonces, τ_{RNT} se llama una *Topología Neutrosófica Refinada* (RNT) si satisface los axiomas:

(RNT-1) ϕ y $\mathcal{U}$ pertenecen a τ_{RNT};

(RNT-2) La intersección de cualquier número finito de elementos en τ_{RNT} está en τ_{RNT};

(RNT-3) La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en τ_{RNT} está en τ_{RNT};

Entonces, $(\mathcal{U}, \tau_{RNT})$ se llama un Espacio Topológico Neutrosófico Refinado sobre $\mathcal{U}$.

La *Topología Neutrosófica Refinada* es una topología definida en un Conjunto Neutrxosófico Refinado.

{De manera similar, la Topología Difusa Refinada se define en un Conjunto Difuso Refinado, mientras que la Topología Difusa Intuicionista Refinada se define en un Conjunto Difuso Intuicionista Refinado, etc.

Y, como generalización, en cualquier tipo de conjunto de extensión difusa [Conjunto Difuso Pitagórico, Conjunto Difuso Esférico, Conjunto Difuso Fermateano, Conjunto Difuso Ortopar q-Rung, etc.] se puede definir una topología de extensión difusa correspondiente.}

12. Conjunto Nítido Neutrosófico

El *Conjunto Nítido Neutrosófico* fue definido por Salama y Smarandache en 2014 y 2015.
Sea X un espacio fijo no vacío. Y sea *D* un Conjunto Nítido Neutrosófico [2], donde $D = <A, B, C>$, con *A, B, C* como subconjuntos de *X*.
Dependiendo de las intersecciones y uniones entre estos tres conjuntos A, B, C se obtienen varios
Tipos de Conjuntos Nítidos Neutrosóficos [2, 3]
El objeto con la forma $D = <A, B, C>$ es llamado:

(a) Un conjunto nítido neutrosófico de Tipo 1 (NCS-Tipo 1) si satisface:

$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$ (conjunto vacío).

(b) Un conjunto nítido neutrosófico de Tipo 2 (NCS-Tipo 2) si satisface:

$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$ y $A \cup B \cup C = X$.

(c) Un conjunto nítido neutrosófico de Tipo 3 (NCS-Tipo 3) si satisface:

$A \cap B \cap C = \phi$ y $A \cup B \cup C = X$.

Por supuesto, se pueden definir más tipos de conjuntos nítidos neutrosóficos modificando las intersecciones y uniones de los subconjuntos *A, B* y *C*.

13. Conjunto Nítido Neutrosófico Refinado

El *Conjunto Nítido Neutrosófico Refinado* [3] fue introducido por Smarandache en 2019, refinando/multiplicando *D* (y denotándolo como *RD = D Refinado*) mediante la refinación/multiplicación de sus conjuntos *A, B, C* en subconjuntos/subconjuntos múltiples de la siguiente manera:

$RD = (A_1, ..., A_p; B_1, ..., B_r; C_1, ..., C_s)$, con $p, r, s \geq 1$ siendo enteros positivos y al menos uno de ellos siendo ≥ 2 para garantizar la refinación/multiplicación de al menos un componente entre *A, B, C,* donde

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i, B = \bigcup_{j=1}^{r} B_j, C = \bigcup_{k=1}^{s} C_k$$

y muchos tipos de conjuntos nítidos neutrosóficos refinados se pueden definir modificando las intersecciones o uniones de los subconjuntos/multiconjuntos $A_i, B_j, C_k, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq s,$ dependiendo de cada aplicación.

14. Definición de Topología Nítida Neutrosófica Refinada

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y P($\mathcal{U}$) la familia de todos los subconjuntos nítidos neutrosóficos refinados (*p, r, s*) de $\mathcal{U}$.

Sea $\tau_{RNCT} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$ una familia de subconjuntos nítidos neutrosóficos refinados (*p, r, s*) de $\mathcal{U}$.

Entonces, τ_{RNCT} se llama *Topología Nítida Neutrosófica Refinada (RNCT)* si satisface los axiomas:

(RNCT-1) ϕ y $\mathcal{U}$ pertenecen a τ_{RNCT};

(RNCT-2) La intersección de cualquier número finito de elementos en τ_{RNCT} está en τ_{RNCT};

(RNCT-3) La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en τ_{RNCT} está en τ_{RNCT}.

Entonces, ($\mathcal{U}$, τ_{RNCT}) se llama un *Espacio Topológico Nítido Neutrosófico Refinado* en $\mathcal{U}$.

Por lo tanto, la *Topología Nítida Neutrosófica Refinada* es una topología definida en el Conjunto Nítido Neutrosófico Refinado.

15. Definición de los n-ésimos Conjuntos de Potencia $P^n(H)$ y $P_*^n(H)$.

Los nésimos Conjuntos de Potencia $P^n(H)$ y $P_*^n(H)$ del conjunto *H*, en los que se basan la Super Hiper Topología y respectivamente la Super Hiper Topología Neutrosófica, describen mejor nuestro mundo real, ya que un sistema *H* (que puede ser un conjunto, empresa, institución, país, región, etc.) está organizado en sub-sistemas, que a su vez están organizados cada uno de ellos en sub-subsistemas, y así sucesivamente.

El Conjunto de Potencia n-ésimo $P^n(H)$ se define recursivamente:

$$P^0(H) \stackrel{\text{def}}{=} H$$

$$P^1(H) = P(H)$$

$$P^2(H) = P(P(H))$$

$$P^3(H) = P(P^2(H)) = P(P(P(H)))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^n(H) = P(P^{n-1}(H)) = \underbrace{P(P(\ldots P(H)\ldots))}_{n}$$

donde *P* se repite *n* veces en la última fórmula,

y el conjunto vacío ϕ (que representa indeterminación, incertidumbre) está permitido en todos los términos de secuencia: $H, P(H), P^2(H), P^3(H), \ldots, P^n(H)$.

Similarmente,

El Conjunto de Potencia n-ésimo $P_*^n(H)$ se define recursivamente:

$$P_*^0(H) \overset{def}{=} H$$
$$P_*^1(H) = P_*(H)$$
$$P_*^2(H) = P_*(P_*(H))$$
$$P_*^3(H) = P_*(P_*^2(H)) = P_*(P_*(P_*(H)))$$
....
$$P_*^n(H) = P_*(P_*^{n-1}(H)) = \underbrace{P_*(P_*(...P_*(H)...))}_{n}$$

donde P se repite n veces en la última fórmula,
y el conjunto vacío ϕ (que representa indeterminación, incertidumbre) no está permitido en ninguno de los términos de la secuencia: $H, P_*(H), P_*^2(H), P_*^3(H), ..., P_*^n(H)$.

16. Super Hiper Operación

Recordamos nuestros conceptos de 2016 de Super Híper Operación, Super Híper Axioma, Super Híper Álgebra y sus correspondientes Super Híper Operación Neutrosófica, Neutrosophic Super Hiper Axioma Neutrosófico y Neutrosophic Super Hiper Álgebra.

Sea $P_*^n(H)$ el n-ésimo conjunto potencia del conjunto H tal que ninguno de $P(H), P^2(H), ..., P^n(H)$ contiene el conjunto vacío ϕ.

Además, sea $P_n(H)$ el n-ésimo conjunto potencia del conjunto H tal que al menos uno de los conjuntos $P(H), P^2(H), ..., P^n(H)$ contiene el conjunto vacío ϕ. Para cualquier subconjunto A, identificamos {A} con A.

Las Super Hiper Operaciones son operaciones cuyo codominio es o bien $P_*^n(H)$ y en este caso se tienen Super Hiper Operaciones de tipo clásico, o bien $P^n(H)$ y en este caso se tienen Super Hiper Operaciones Neutrosóficas, para enteros n≥2.

17. El conjunto potencia n-ésimo describe mejor nuestro mundo real.

Los conjuntos potencia n-ésimos $P_*^n(H)$ y $P_*^n(H)$, en los que se basan la Super Hiper Topología y la Super Hiper Topología Neutrosófica respectivamente, describen mejor nuestro mundo real, ya que un sistema H (que puede ser un conjunto, una empresa, una institución, un país, una región, etc.) está organizado en sub-sistemas, que a su vez están organizados cada uno en sub-subsistemas, y así sucesivamente.

18. Super Hiper Axioma

Un Super Hiper Axioma de tipo clásico o más precisamente un (m, n)-Super Hiper Axioma es un axioma basado en Super Hiper Operaciones de tipo clásico.
De manera similar, un Super Hiper Axioma Neutrosófico {o (m, n)-Super Hiper Axioma Neutrosófico} es un axioma basado en Super Hiper Operaciones Neutrosóficas.
Existen:

- Super Hiper Axiomas Fuertes, cuando el lado izquierdo es igual al lado derecho como en los axiomas no hiper,
- y Super Hiper Axiomas Débiles, cuando la intersección entre el lado izquierdo y el lado derecho no es vacía.

19. Super Hiper Álgebra y Super Hiper Estructura

Una Super Hiper Álgebra o más precisamente una (m-n)-Super Hiper Álgebra es un álgebra que trata con Super Hiper Operaciones y Super Hiper Axiomas.

Por otra parte, una Super Hiper Álgebra Neutrosófica {o (m, n)-Super Hiper Álgebra Neutrosófica } es un álgebra que trata con Super Hiper Operaciones Neutrosóficas y Super Hiper Operaciones Neutrosóficas.

En general, tenemos Super Hiper Estructuras {o (m-n)-Super Hiper Estructuras}, y correspondientes Super Hiper Estructuras Neutrosóficas. Por ejemplo, existen Super Hiper Grupoides, Super Hiper Semigrupos, Super Hiper Grupos, Super Hiper Anillos, Super Hiper Espacios Vectoriales, etc.

20. Distinción entre Super Hiper Algebra y Super Hiper Algebra Neutrosófica

i. Si ninguno de los conjuntos de potencia $P^k(H)$, 1≤k≤n, no incluye el conjunto vacío ϕ, entonces se tiene una Super Hiper Álgebra de tipo clásico;
ii. Si al menos un conjunto de potencia, $P^k(H)$, 1≤k≤n, incluye el conjunto vacío ϕ, entonces se tiene una Super Hiper Álgebra Neutrosófica.

21. Definición de Super Hiper Topología (SHT)[6]

Es una topología diseñada sobre el Conjunto Potencia enésimo de un conjunto no vacío dado *H*, que excluye el conjunto vacío, denotado como $P_*^n(H)$, construido de la siguiente manera:

$P_*(H)$ es el primer conjunto potencia del conjunto *H*, y el índice * significa sin el conjunto vacío (Ø);

$P_*{}^2(H) = P_*(P_*(H))$ es el segundo conjunto potencia de *H* (o el conjunto potencia del conjunto potencia de *H*), sin los conjuntos vacíos; y así sucesivamente, el enésimo conjunto potencia de *H*,

$P_*{}^n(H) = P_*(P_*{}^{n-1}(H)) = \underbrace{P_*(P_*(\ldots P_*(H)\ldots))}_{n}$, donde P_* se repite *n* veces (n ≥ 2), y sin los conjuntos vacíos.

Consideremos τ_{SHT} como una familia de subconjuntos de $P_*{}^n(H)$.

Entonces, τ_{SHT} se llama Super Hiper Topología Neutrosófica sobre $P_*{}^n(H)$, si satisface los siguientes axiomas:

(SHT-1) ϕ y $P_*{}^n(H)$.) pertenecen a τ_{SHT}.

(SHT-2) La intersección de cualquier número finito de elementos en τ_{SHT} está en τ_{SHT}.

(SHT-3) La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en τ_{SHT} está en τ_{SHT}.

Entonces, $(P_*{}^n(H), \tau_{SHT})$ se llama un Super Hiper Espacio Topológico en $P_*{}^n(H)$.

22. Definición de Super Hiper Topología Neutrosófica (NSHT)[6]

Es, de manera similar, una topología diseñada en el n-ésimo Conjunto Potencia de un conjunto dado no vacío *H*, pero también incluye los conjuntos vacíos [que representan las indeterminaciones].

Como tal, en las fórmulas anteriores, $P_*(H)$ que excluye el conjunto vacío, se reemplaza por $P(H)$ que incluye el conjunto vacío.

$P(H)$ es el primer conjunto potencia del conjunto *H*, incluyendo el conjunto vacío (Ø);

$P^2(H) = P(P(H))$ es el segundo conjunto potencia de *H* (o el conjunto potencia del conjunto potencia de *H*), que incluye los conjuntos vacíos;

y así sucesivamente, el n-ésimo conjunto potencia de *H*,

$$P^n(H) = P(P^{n-1}(H)) = \underbrace{P(P(\ldots P(H)\ldots))}_{n}$$

donde *P* se repite *n* veces (n ≥ 2) e incluye los conjuntos vacíos (Ø).

Consideremos τ_{NSHT} como una familia de subconjuntos de $P^n(H)$.

Entoncesτ_{NSHT} se llama Super Hiper Topología Neutrosófica en $P^n(H)$, si satisface los siguientes axiomas:

(NSHT-1) ϕ y $P^n(H)$ pertenecen a τ_{NSHT}.

(NSHT-2) La intersección de cualquier número finito de elementos en τ_{NSHT} está en τ_{NSHT}.

(NSHT-3) La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en τ_{NSHT} está en τ_{NSHT}.

Entonces$(P^n(H), \tau_{NSHT})$ se llama Espacio Super Hiper Topológico Neutrosófico en $P^n(H)$.

23. Introducción al Análisis No Estándar [9, 10, 11, 12, 29]

Un ***infinitesimal*** (ε) es un número ε tal que |ε|<1/n, para cualquier número entero positivo *n* no nulo. Un infinitesimal está cerca de cero, tan pequeño que no puede ser medido.

El infinitesimal es un número más pequeño, en valor absoluto, que cualquier cosa positiva diferente de cero.

Los infinitesimales se utilizan en cálculo.

Un ***infinito*** (ω) es un número mayor que cualquier cosa:

1 + 1 + 1 + … + 1 (para cualquier cantidad finita de términos)

Los infinitos son los recíprocos de los infinitesimales.

El conjunto de <u>*hiperreales*</u> (o números no estándar reales), denotado como R^*, es la extensión del conjunto de los números reales, denotado como *R*, y comprende los infinitesimales y los infinitos, que pueden representarse en la *recta numérica hiperreal*.

$1/\varepsilon = \omega/1$.

El conjunto de hiperreales cumple el *principio de transferencia*, que establece que las afirmaciones de primer orden en *R* también son válidas en R^*.

Una *mónada (halo)* de un elemento $a \in R^*$, denotado por $\mu(a)$, es un subconjunto de números infinitesimalmente cercanos a *a*.

24. Primera extensión del análisis no estándar (Smarandache, 1998)

Denotemos por R+* el conjunto de números hiperreales positivos distintos de cero.

Consideramos la mónada izquierda y la mónada derecha, y la *binada (perforada)* que introdujimos como extensión en 1998 [5]:

Mónada izquierda{ que denotamos, por simplicidad, por $({}^{-}a)$ o solo ${}^{-}a$ } se define como:

$\mu({}^{-}a) = ({}^{-}a) = {}^{-}a = \overset{-}{a} = \{a - x, x \in R_+^* \mid x \text{ es infinitesimal}\}$.

Mónada derecha{ que denotamos, por simplicidad, por (a^+) o sólo por a^+ } se define como:

$\mu(a^+) = (a^+) = a^+ = \overset{+}{a} = \{a + x, x \in R_+^* \mid x \text{ es infinitesimal}\}$.

Binada perforada{ que denotamos, por simplicidad, por $({}^{-}a^+)$ o solo ${}^{-}a^+$ } se define como:

$\mu({}^{-}a^+) = ({}^{-}a^+) = {}^{-}a^+ = \overset{-+}{a} =$

$= \{a - x, x \in R_+^* \mid x \text{ es infinitesimal}\} \cup \{a + x, x \in R_+^* \mid x \text{ es infinitesimal}\}$

$= \{a \pm x, x \in R_+^* \mid x \text{ es infinitesimal}\}$.

La mónada izquierda, la mónada derecha y la binada perforada son subconjuntos de R^*.

25. Segunda extensión del Análisis No Estándar

Por la necesidad de realizar cálculos que se utilizarán en la lógica neutrosófica no estándar con el fin de calcular los operadores de lógica neutrosófica no estándar (conjunción, disyunción, negación, implicación, equivalencia) y para tener el conjunto de MoBiNad Real no estándar cerrado bajo operaciones aritméticas, Smarandache extendió en 2019: la mónada izquierda a la Mónada Izquierda Cerrada a la Derecha, la mónada derecha a la Mónada Derecha Cerrada a la Izquierda; y la Binada Perforada a la Binada No Perforada, definido de la siguiente manera:

Mónada izquierda cerrada a la derecha

$\mu\left(\overset{-0}{a}\right) = \left(\overset{-0}{a}\right) = \overset{-0}{a} = \{a - x \mid x = 0, \text{ or } x \in R_+^*$

$\text{y } x \text{ es infinitesimal}\} = \mu(-a) \cup \{a\} = (-a) \cup \{a\}$

$= -\text{un} \cup \{a\}$.

Mónada derecha cerrada a la izquierda

$\mu\left(\overset{0+}{a}\right) = \left(\overset{0+}{a}\right) = \overset{0+}{a} = \{a + x \mid x = 0, \text{ or } x \in R_+^*$

$\text{y } x \text{ es infinitesimal}\} = \mu(a^+) \cup \{a\} = (a^+) \cup \{a\}$

$= a^+ \cup \{a\}$.

Binada sin perforar

$\mu\left(\overset{-0+}{a}\right) = \left(\overset{-0+}{a}\right) = \overset{-0+}{a} = \{a - x \mid x \in R_+^* \text{ y } x \text{ es infinitesimal}\}$

$\cup \{a + x \mid x \in R_+^* \text{ y } x \text{ es infinitesimal}\} \cup \{\text{un}\} =$

$= \{a \pm x \mid x = 0, \text{ or } x \in R_+^* \text{ y } x \text{ es infinitesimal}\}$

$= \mu({}^{-}a^+) \cup \{a\} = ({}^{-}a^+) \cup \{a\} = {}^{-}a^+ \cup \{a\}$

El elemento {a} se ha incluido en la mónada izquierda, la mónada derecha y la binada perforada respectivamente.

26. Topología Neutrosófica No Estándar

Las dos extensiones anteriores del Análisis No Estándar, utilizadas en la construcción de la Lógica Neutrosófica No Estándar, el Conjunto Neutrosófico No Estándar y la Probabilidad Neutrosófica No Estándar, se definieron en el Intervalo Unitario No Estándar.

$I_{noestandar} =]^{-}0, 1^{+}[$,

fundamos [13] desde 1998, y anteriormente lo hemos propuesto [13, 14, 15, 29], donde:

$I_{noestandar} =]^{-}0, 1^{+}[= \{x; \overset{0}{x}, \overset{-}{x}, \overset{+}{x}, \overset{-0}{x}, \overset{0+}{x}, \overset{-+}{x}, \overset{-0+}{x}; 0 \leq x \leq, x \in R\}$, dónde R es el conjunto de los números reales.

Sea $(]^{-}0, 1^{+}[)$ el conjunto potencia de $]^{-}0, 1^{+}[$.

Sea τ =$P(]^{-}0, 1^{+}[)$, lo que significa que τ es la familia de todos los subconjuntos de $P(]^{-}0, 1^{+}[)$. Por supuesto:

i. ϕ y $]^{-}0,1^{+}[$ pertenecen a τ.
ii. La intersección de cualquier número finito de elementos en τ está en τ.
iii. La unión de cualquier número de elementos finitos o infinitos en τ está en τ.

Por lo tanto, τ es una topología neutrosófica no estándar.

Entonces ($]^{-}0,1^{+}[$, τ) se denomina espacio topológico neutrosófico no estándar.

27. Topología no estándar

Como generalización de la Topología Neutrosófica No Estándar, se propone ahora la Topología No Estándar.

Consideremos los números reales $a, b \in R$ y el intervalo real $[a, b]$. Extendámoslo a un intervalo no estándar $]^{-}a, b^{+}[$ es de la misma manera que para la Lógica y el Conjunto Neutrosóficos No Estándar.

Tengamos por convención el mismo significado de las siguientes notaciones:

$x \overset{\text{def}}{=} \overset{0}{x}$, y $^{-}x = \overset{-}{x}$, also $x^{+} = \overset{+}{x}$ para cualquier número real x.

Entonces:

$]^{-}a, b^{+}[= \{x; \overset{0}{x}, \overset{-}{x}, \overset{+}{x}, \overset{-0}{x}, \overset{0+}{x}, \overset{-+}{x}, \overset{-0+}{x}; a \leq x \leq b, x \in R\}$, donde R es el conjunto de los números reales.

Sea $U_{NonStandard} =]^{-}a, b^{+}[$ un intervalo no estándar, para a < b, donde a y b son números reales, y $P(U_{NonStandard})$ sea el conjunto potencia de $U_{NonStandard\ r}$.

Entonces $P(U_{NonStandard})$ está formado por el conjunto vacío (ϕ) y él mismo $U_{NonStandard\ r}$, junto con todos los subconjuntos estándar y no estándar de$]^{-}a, b^{+}[$.

Las intersecciones finitas y las uniones finitas o infinitas de cualquier subconjunto estándar y no estándar siguen siendo subconjuntos (estándar o no estándar) de $U_{NonStandard\ r}$.

Sea $\tau_{NonStandard} \subseteq P(U_{NonStandard})$ una familia de subconjuntos estándar o no estándar de $P(U_{NonStandard})$.

Entonces $\tau_{NonStandard}$ se denomina topología no estándar en $U_{NoEstandar}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. El conjunto vacío (ϕ) y $U_{NoEstandar}$ pertenece a $\tau_{NonStandard}$.
ii. La intersección de un número finito de elementos en $\tau_{NonStandard}$ aún está en $\tau_{NonStandard}$.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de elementos en en $\tau_{NonStandard}$ aún está en $\tau_{NonStandard}$.

Entonces ($U_{NonStandard}, \tau_{NonStandard}$) se denomina Espacio Topológico No Estándar.

28. Conjunto Real No Estándar Extendido ($\overset{-0+}{ER}$)

Lo presentamos ahora por primera vez:

$$\overset{-0+}{ER} = \{x; \overset{0}{x}, \overset{-}{x}, \overset{+}{x}, \overset{-0}{x}, \overset{0+}{x}, \overset{-+}{x}, \overset{-0+}{x}; x \in R\}$$, de hecho:

$$\overset{-0+}{ER} = \overset{0}{R} \cup \overset{-}{R} \cup \overset{+}{R} \cup \overset{-0}{R} \cup \overset{0+}{R} \cup \overset{-+}{R} \cup \overset{-0+}{R}$$,

donde se utilizan las notaciones:

$$\overset{0}{R} \overset{def}{\equiv} R$$

$$\overset{-}{R} = \{\overset{-}{x}, x \in R\}$$

$$\overset{+}{R} = \{\overset{+}{x}, x \in R\}$$

$$\overset{-0}{R} = \{\overset{-0}{x}, x \in R\}$$

$$\overset{0+}{R} = \{\overset{0+}{x}, x \in R\}$$

$$\overset{-+}{R} = \{\overset{-+}{x}, x \in R\}$$

$$\overset{-0+}{R} = \{\overset{-0+}{x}, x \in R\}$$

29. Topología Real No Estándar Extendida Mayor

$P\left(\overset{-0+}{ER}\right)$, que es el conjunto de potencias de $\overset{-0+}{ER}$, genera la Topología Real No Estándar Extendida Mayor de todo el conjunto real no estándar extendido $\overset{-0+}{ER}$.

30. Sobre/Infra/Extra-Conjunto y Lógicas y Probabilidades

El Conjunto Neutrosófico se extendió [Smarandache, 2007] al SobreConjunto Neutrosófico (cuando algún componente Neutrosófico es > 1), ya que observamos que, por ejemplo, un empleado que trabaja horas extras merece un grado de pertenencia > 1, en comparación con un empleado que solo trabaja a tiempo completo regular y cuyo grado de pertenencia = 1;

y al InfraConjunto Neutrosófico (cuando algún componente Neutrosófico es < 0), ya que, por ejemplo, un empleado que causa más daño que beneficio a su empresa merece un grado de pertenencia < 0, en comparación con un empleado que produce beneficio para la empresa y tiene un grado de pertenencia > 0;

y al ExtraConjunto Neutrosófico (cuando algunos componentes Neutrosóficos están fuera del intervalo [0, 1], es decir, algunos componentes Neutrosóficos > 1 y algunos componentes Neutrosóficos < 0).

De manera similar para la Sobre/Infra/Extra-Lógica y respectivamente la Sobre/Infra/Extra-Topología [16, 17, 18, 19].

Dado que estas ideas parecen contraintuitivas y totalmente diferentes del marco convencional, presentamos a continuación ejemplos elementales de nuestro mundo real de tales grados que están fuera de lo común {nos referimos fuera del intervalo [0, 1]}.

31. Ejemplo Real de SobreMembresía e InfraMembresía

En una empresa, un empleado a tiempo completo trabaja 40 horas por semana. Consideremos el último periodo de la semana.

Helen trabajó a tiempo parcial, solo 30 horas, y las otras 10 horas estuvo ausente sin pago; por lo tanto, su grado de membresía fue de 30/40 = 0.75 < 1.

John trabajó a tiempo completo, 40 horas, por lo que tuvo un grado de membresía de 40/40 = 1, con respecto a esta empresa.

Pero George trabajó horas extras, 5 horas más, por lo que su grado de membresía fue (40+5)/40 = 45/40 = 1.125 > 1.

Por lo tanto, necesitamos hacer una distinción entre los empleados que trabajan horas extras y aquellos que trabajan a tiempo completo o parcial. Es por eso que necesitamos asociar un grado de membresía estrictamente mayor que 1 a los trabajadores que hacen horas extras.

Ahora, otro empleado, Jane, estuvo ausente sin pago durante toda la semana, por lo que su grado de membresía fue de 0/40 = 0.

Sin embargo, Richard, quien también fue contratado a tiempo completo, no solo no vino a trabajar la semana pasada en absoluto (0 horas trabajadas), sino que provocó, al iniciar accidentalmente un incendio devastador, mucho daño a la empresa, lo que se estimó en un valor equivalente a la mitad de su salario (es

decir, lo que habría ganado por trabajar 20 horas esa semana). Por lo tanto, su grado de membresía debe ser menor que el de Jane (ya que Jane no causó ningún daño). Por lo tanto, el grado de membresía de Richard, con respecto a esta empresa, fue de -20/40 = -0.50 < 0.

Consecuentemente, necesitamos hacer una distinción entre los empleados que causan daño y aquellos que generan ganancias o no causan ni daño ni ganancias a la empresa.

Por lo tanto, los grados de membresía > 1 y < 0 son reales en nuestro mundo, por lo que debemos tenerlos en cuenta.

Entonces, de manera similar, la Lógica/Medida/Probabilidad/Estadística Neutrosófica se extendieron respectivamente a la Sobre/Infra/Extra-Lógica/Medida/Probabilidad/Estadística Neutrosófica (Smarandache, 2007).

32. Definición de SobreConjunto Neutrosófico de Valor Único

Sea U_{over} un SobreUniverso de Discurso {es decir, existen algunos elementos en U_{over} cuyos grados de membresía son > 1}, y el SobreConjunto Neutrosófico $A_{over} \subseteq U_{over}$.

Sean *T(x), I(x), F(x)* las funciones que describen los grados de membresía, membresía indeterminada y no membresía respectivamente, de un elemento genérico x $\in U_{over}$, con respecto al SobreConjunto Neutrosófico A_{over}:

$$T(x), I(x), F(x): U_{over} \to [0, \Omega]$$

dónde $0 < 1 < \Omega$, y Ω se llama SobreLímite,

$T(x), I(x), F(x) \in [0, \Omega]$, para todos los $x \in U_{over}$.

Un SobreConjunto Neutrosófico de Valor Único A_{over} se define como:

$A_{over} = \{(x, <T(x), I(x), F(x)>), x \in U_{over}\}$,

tal que existen algunos elementos en A_{over} que tienen al menos un componente neutrosófico que es > 1.

33. Definición de SobreTopología Neutrosófica de Valor Único

Sea U_{over} un SobreUniverso de Discurso, y P(U_{over}) el conjunto potencia de U_{over}.

Sea $\tau_{over} \subseteq P(Uover)$ una familia de SobreConjuntos Neutrosoficos de Valor Único de $Uover$.

Entonces, τ_{over} se llama SobreTopología Neutrosófica de Valor Único en U_{over} si satisface los siguientes axiomas:

(i) ϕ y $Uover$ pertenecen a τ_{over}.
(ii) La intersección de cualquier número finito de SobreConjuntos Neutrosóficos de Valor Único en τ_{over} está en τ_{over}.
(iii) La unión de cualquier número finito o infinito de SobreConjuntos Neutrosóficos de Valor Único en τ_{over}está en τ_{over}.

Entonces, (U_{over}, τ_{over})) se llama un Espacio SobreTopológico Neutrosófico.

34. Definición del InfraConjunto Neutrosófico de Valor Único

Sea U_{under} un InfraUniverso de Discurso {es decir, existen algunos elementos en U_{under} cuyos grados de membresía son < 0}, y sea el InfraConjunto Neutrosófico $A_{under} \subseteq Uunder$.

Sean *T(x), I(x), F(x)* las funciones que describen los grados de membresía, membresía indeterminada y no membresía respectivamente, de un elemento genérico $x \in U_{under}$, con respecto al InfraConjunto Neutrosófico A_{under}:

$$T(x), I(x), F(x): U_{under} \to [\Psi, 1]$$

donde Ψ < 0 < 1, y Ψ se llama InfraLímite,

$T(x), I(x), F(x) \in [\Psi, 1]$, para todo $x \in U_{under}$.

Un InfraConjunto Neutrosófico de Valor Único A_{under} se define como:
A_{under} = {(x, <T(x), I(x), F(x)>), $x \in U_{under}$},
tal que existen algunos elementos en A_{under} que tienen al menos un componente neutrosófico que es < 0.

35. Definición de InfraTopología Neutrosófica de Valor Único

Sea U_{under} un InfraUniverso de Discurso, y P(U_{under}) el conjunto potencia de U_{under}.
Sea $\tau_{under} \subseteq P(U_{under})$ una familia de InfraConjuntos Neutrosóficos de Valor Único de U_{under}.
Entonces, τ_{under} se llama una InfraTopología Neutrosófica de Valor Único en U_{under} si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y U_{under} pertenecen a τ_{under}.
ii. La intersección de cualquier cantidad finita de InfraConjuntos Neutrosóficos de Valor Único en τ_{under} está en τ_{under}.
iii. La unión de cualquier cantidad finita o infinita de InfraConjuntos neutrosóficos de valor único en τ_{under} está en τ_{under}.

Entonces, (U_{under}, τ_{under}) se llama un Espacio Neutrosófico InfraTopológico.

36. Definición de ExtraConjunto Neutrosófico de Valor Único

Sea U_{off} un ExtraUniverso de Discurso {es decir, existen elementos en U_{off} cuyos grados de pertenencia están fuera del intervalo [0, 1], algunos < 0 y otros > 1}, y el ExtraConjunto Neutrosófico $A_{off} \subseteq U$.
Sean *T(x), I(x), F(x)* las funciones que describen los grados de pertenencia, de indeterminación y de no pertenencia respectivamente, de un elemento genérico $x \in U_{off}$, con respecto al ExtraConjunto Neutrosófico U_{off}:

$$T(x), I(x), F(x): U_{off} \to [\Psi, \Omega]$$

donde Ψ<0<1<Ω, y Ψ se llama InfraLímite, mientras que Ω se llama SobreLímite,
$T(x), I(x), F(x) \in [\Psi, \Omega]$, para todo $x \in U_{off}$.
Un ExtraConjunto Neutrosófico de Valor Único A_{off} se define como:
A_{off} = {(x, <T(x), I(x), F(x)>), $x \in U_{off}$},
tal que existen algunos elementos en A_{off} que tienen al menos un componente neutrosófico que es > 1, y al menos un componente neutrosófico que es < 0.

37. Definición de ExtraTopología Neutrosófica de Valor Único

Sea U_{off} un ExtraUniverso del Discurso, y $P(U_{off})$ el conjunto potencia de U_{off}.

Sea $\tau_{off} \subseteq P(U_{off})$ una familia de ExtraConjuntos Neutrosóficos de Valor Único de U_{off}.

Entonces τ_{off} se llama ExtraTopología Neutrosófica de Valor Único en U_{off} si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y U_{off} pertenecen a τ_{off}.
ii. La intersección de cualquier número finito de ExtraConjuntos Neutrosóficos de Valor Único en τ_{off} está en τ_{off}.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de ExtraConjuntos Neutrosóficos de Valor Único en τ_{off} está en τ_{off}.

Entonces (U_{off}, τ_{off}) se llama Espacio Neutrosófico ExtraTopológico.

38. Conjunto Triplete Neutrosófico Débil/Fuerte (*N*)

Sea *(N, *)* un grupo o conjunto no vacío dotado de una operación binaria bien definida *.

Un Triplete Neutrosófico es un objeto de la forma <*x, neut(x), anti(x)*>, para $x \in N$,

donde $neut(x) \in N$ es el neutro de x, diferente del elemento unitario algebraico clásico, si lo hay, tal que:

$$x * neut(x) = neut(x) * x = x$$

y $anti(x) \in N$ es el opuesto de x tal que:

$x * anti(x) = anti(x) * x = neutro(x).$

En general, un elemento x puede tener más neutrales (*neuts*) y más opuestos (*antis*).

Los tripletes neutrosóficos y sus estructuras algebraicas de tripletes neutrosóficos fueron introducidos por primera vez por Florentin Smarandache y Mumtaz Ali [20, 21, 22, 23] en 2014-2016.

39. Definición de Conjunto Débil del Triplete Neutrosófico (NTS, *) es un conjunto tal que cada elemento $a \in NTS$ es parte de un triplete neutrosófico <b, neut(b), anti(b)>, es decir, $a = b$, or $a = neut(b)$, or $a = anti(b)$.

40. Definición de la Topología Débil de Triplete Neutrosófico de Valor Único

Sea $U_{Triplet-Weak}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto Débil de Triplete Neutrosófico, y $P(U_{Triplet-Weak})$ el conjunto de potencias de $U_{Triplet-Weak}$.

Sea $\tau_{Triplet-Weak} \subseteq P(U_{Triplet-Weak})$ una familia de Conjuntos Débiles de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único $U_{Triplet-Weak}$.

Entonces $\tau_{Triplet-Weak}$ se llama Topología Débil de Triplete Neutrosófico de Valor Único en $U_{Triplet-Weak}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{Triplet-Weak}$ pertenecen a $\tau_{Triplet-Weak}$.
ii. La intersección de cualquier número finito de Conjuntos Débiles de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único en $\tau_{Triplet-Weak}$ está en $\tau_{Triplet-Weak}$.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de Conjuntos Débiles de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único en $\tau_{Triplet-Weak}$ está en $\tau_{Triplet-Weak}$.

Entonces $(U_{Triplet-Weak}, \tau_{Triplet-Weak})$ se llama Espacio Topológico Débil de Triplete Neutrosófico.

41. Definición del Conjunto Fuerte de Triplete Neutrosófico (o **Conjunto de Tripletes Neutrosóficos**)

El grupo *(N, *)* se llama Conjunto Fuerte Triplete Neutrosófico si para cualquier $a \in N$ existe algún neutro de *a*, denotado $neut(a) \in N$, diferente del elemento unitario algebraico clásico (si lo hay), y algún opuesto de a, llamado $anti(a) \in N$.

Ejemplo de Conjunto Fuerte de Triplete Neutrosófico

*	1	2
1	2	1
2	1	1

El conjunto ({1,2}, *) es un grupoide, sin elemento unitario clásico.

Entonces <1, 2, 1> y <2, 1, 2> y son tripletes neutrosóficos.

El conjunto fuerte del triplete neutrosófico es N = {1, 2}.

42. Teorema sobre los Conjuntos Fuerte y Débil de Triplete Neutrosófico

Cualquier conjunto fuerte de triplete neutrosófico es un conjunto débil de triplete neutrosófico, pero no a la inversa.

Prueba.

Sea $(N, *)$ un conjunto fuerte triplete neutrosófico. Si $a \in N$, entonces también está incluido en N, por lo tanto, existe un triplete neutrosófico en N que incluye a a, de donde N es un conjunto débil de triplete neutrosófico.

Por el contrario, lo demostramos utilizando un contraejemplo.

Sea $Z_3 = \{0, 1, 2\}$, incrustado con la multiplicación × módulo 3, que es una ley bien definida. El elemento unitario clásico en Z_3 es 1.

$(Z_3, \times)$ es un conjunto débil de tripletes neutrosóficos, ya que los tripletes neutrosóficos se formaron en Z_3 con respecto a la ley × contiene todos los elementos $0, 1, 2$,

es decir, <0, 0, 0>, <0, 0, 1> y <0, 0, 2>.

Pero $(Z_3,\times)$ no es un conjunto fuerte de triplete neutrosófico, ya que, por ejemplo, para $2 \in Z_3$ no hay $neut(2) \neq 1$ ni hay $anti(2)$.

43. Definición de Topología Fuerte de Triplete Neutrosófico de Valor Único

Sea $U_{Triplet-Strong}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto Fuerte de Triplete Neutrosófico, y $P(U_{Triplet-Strong})$ el conjunto de potencias de $U_{Triplet-Strong}$.

Sea $\tau_{Triplet-Strong} \subseteq P(U_{Triplet-Strong})$ una familia de Conjuntos Fuertes de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único $U_{Triplet-Strong}$.

Entonces $\tau_{Triplet-Strong}$ se llama Topología Fuerte de Triplete Neutrosófico de Valor Único en $U_{Triplet-Strong}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{Triplet-Strong}$ pertenecen a $\tau_{Triplet-Strong}$.
ii. La intersección de cualquier número finito de Conjuntos Fuertes de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único en $\tau_{Triplet-Strong}$ está en $\tau_{Triplet-Strong}$.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de Conjuntos Fuertes de Tripletes Neutrosóficos de Valor Único en $\tau_{Triplet-Strong}$ está en $\tau_{Triplet-Strong}$.

Entonces ($U_{Triplet-Strong}$, $\tau_{Triplet-Strong}$) se llama Espacio Topológico Fuerte de Triplete Neutrosófico.

44. Triplete Neutrosófico Extendido

Un Triplete Neutrosófico Extendido es un triplete neutrosófico, definido como anteriormente, pero donde el *neutro* de x {indicado por $_{e}neut(x)$ y llamado "neutro extendido", donde "e" al frente significa 'extendido'} puede ser igual al elemento unitario algebraico clásico (si lo hay) de la ley * definido en el conjunto. Por lo tanto, se libera la restricción "diferente del elemento unitario algebraico clásico, si lo hay".

De esta manera, un triplete neutrosófico extendido es un objeto de la forma $<x, {}_{e}neut(x), {}_{e}anti(x)>$, para x∈N, donde $_{e}neut(x) \in N$ es el neutro extendido de x, que puede ser igual o diferente del elemento unitario algebraico clásico, si lo hubiera, tal que:

$$X * {}_{e}neut(x) = {}_{e}neut(x) * x = x$$

y *anti(x)*∈*N* es el opuesto extendido de x tal que:

$$x *_e anti(x) = {}_e anti(x) * x = {}_e neut(x).$$

En general, para cada x ∈ N existen muchos $_e$*neuts* (neutrales extendidos) y $_e$*antis* (opuestos extendidos). Los tripletes neutrosóficos extendidos fueron introducidos por Smarandache [27, 28] en 2016.

45. Definición de Conjunto Débil de Triplete Extendido Neutrosófico

El conjunto *N* se llama conjunto débil de triplete extendido neutrosófico si para cualquier x∈N existe un triplete extendido neutrosófico $\langle y, {}_e neut(y), {}_e anti(y)\rangle$ incluido en *N*, tal que $x = y$ o $x = {}_e neut(y)$ o $x = {}_e anti(y)$.

46. Definición de Topología Débil de Triplete Extendido Neutrosófico de Valor Único

Sea $U_{Extended-Triplet-Weak}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto Débil de Triplete Extendido Neutrosófico, y $P(U_{Extended-Triplet-Weak})$ el conjunto de potencias de $U_{Extended-Triplet-Weak}$.

Sea $\tau_{Extended-Triplet-Weak} \subseteq P(U_{Extended-Triplet-Weak})$ una familia de Conjuntos Débiles de Tripletes Neutrosóficos Extendidos de Valor Único $U_{Extended-Triplet-Weak}$.

Entonces $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$ se llama Topología Débil de Triplete Extendido Neutrosófico de Valor Único en $U_{Extended-Triplet-Weak}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{Extended-Triplet-Weak}$ pertenecen a $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$.

ii. La intersección de cualquier número finito de conjuntos débiles de tripletes neutrosóficos extendidos de valor único en $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$ está en $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$.

iii. La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos débiles de tripletes neutrosóficos extendidos de valor único en $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$ es en $\tau_{Extended-Triplet-Weak}$.

Entonces $(U_{Extended-Triplet-Weak}, \tau_{Extended-Triplet-Weak})$ se denomina espacio topológico débil de triplete extendido neutrosófico.

47. Definición de Conjunto Fuerte de Triplete Extendido Neutrosófico

El conjunto *N* se llama conjunto fuerte triplete extendido neutrosófico si para cualquier x ∈ N existen $_e neut(x) \in N$ y $_e anti(x) \in N$.

48. Definición de Topología Fuerte de Triplete Extendido Neutrosófico de Valor Único

Sea $U_{Extended-Triplet-Strong}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto Fuerte de Triplete Extendido Neutrosófico, y $P(U_{Extended-Triplet-Strong})$ el conjunto de potencias de $U_{Extended-Triplet-Strong}$.

Sea $\tau_{Extended-Triplet-Strong} \subseteq P(U_{Extended-Triplet-Strong})$ una familia de Conjuntos Fuertes de Tripletes Neutrosóficos Extendidos de Valor Único $U_{Extended-Triplet-Strong}$.

Entonces $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$ se llama Topología Fuerte de Triplete Neutrosófico Extendido de Valor Único en $U_{Extended-Triplet-Strong}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{Extended-Triplet-Strong}$ pertenecen a $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$.

ii. La intersección de cualquier número finito de conjuntos fuertes de tripletes neutrosóficos extendidos de valor único en $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$ está en $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$.

iii. La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos fuertes de tripletes neutrosóficos extendidos de valor único en $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$ está en $\tau_{Extended-Triplet-Strong}$.

Entonces $(U_{Extended-Triplet-Strong}, \tau_{Extended-Triplet-Strong})$ se denomina Espacio Topológico Fuerte de Triplete Extendido Neutrosófico.

49. Duplas neutrosóficas

Florentin Smarandache introdujo las duplas neutrosóficas y las estructuras algebraicas de duplas neutrosóficas [24, 25, 26] en 2016.

Sea U un universo de discurso, y un conjunto D incluido en U, dotado de una ley # bien definida.

50. Definición de la Dupla Neutrosófica

Decimos que *<a, neut(a)>*, donde *a*, y su neutro *neut(a)* pertenecen a *D*, es una dupla neutrosófica si:
1) *neut(a)* es diferente del elemento unitario de *D* con respecto a la ley # (si la hay);
2) *a # neut(a) = neut(a) # a = a*;
3) no existe ningún *anti(a)* opuesto perteneciente a *D* para el cual
a # anti(a) = anti(a) # a = neut(a).

51. Ejemplo de Duplas Neutrosóficas

En (Z_8, #), el conjunto de números enteros con respecto a la multiplicación regular módulo 8, uno tiene las siguientes duplas neutrosóficas:

<2, 5>, <4, 3>, <4, 5>, <4, 7> y <6, 5>.

Prueba:

Sea $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, teniendo el elemento unitario 1 con respecto a la multiplicación # módulo 8.
2 # 5 = 5 # 2 = 10 = 2 (mod 8),
entonces *neut(2)* = 5 ≠ 1.
No hay *anti(2)* ∈ Z_8, porque:
2 # anti(2) = 5 (mod 8),
o *2y = 5 (mod 8)* al denotar *anti(2) = y*, equivale a:
2y - 5 = M_8{múltiplo de 8}, o *2y - 5 = 8k*, donde *k* es un número entero, o
2(y - 4k) = 5, donde tanto *y* como *k* son números enteros, o:
número par = número impar, lo cual es imposible.
Por lo tanto, demostramos que *<2, 5>* es una dupla neutrosófica.
Lo mismo ocurre con *<4, 5>, <4, 3>, <4, 7> y <6, 5>*.
Un contraejemplo: *<0, 0>* no es una dupla neutrosófica, porque
es un triplete neutrosófico: *<0, 0, 0>*, donde existe un *anti(0) = 0*.

52. Definición de Topología de Dupla Neutrosófica de Valor Único

Sea U_{Duplet} un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto de Dupla Neutrosófica, y $P(U_{Duplet})$ el conjunto de potencias de U_{Duplet}.

Sea $\tau_{Duplet} \subseteq P(U_{Duplet})$ una familia de Conjuntos de Dupla Neutrosóficas de Valor Único de U_{Duplet}.

Entonces τ_{Duplet} se llama Topología de Dupla Neutrosófica de Valor Único en U_{Duplet} si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y U_{Duplet} pertenecen a τ_{Duplet}.
ii. La intersección de cualquier número finito de conjuntos de duplas neutrosóficas de valor único en τ_{Duplet} está en τ_{Duplet}.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos de duplas neutrosóficas de valor único en τ_{Duplet} está en τ_{Duplet}.

Entonces $(U_{Duplet}, \tau_{Duplet})$ se llama Espacio Topológico de Dupla Neutrosófica.

53. Definición de Dupla Neutrosófica Extendida

Sea *U* un universo de discurso, y un conjunto *D* incluido en *U*, dotado de una ley # bien definida. Decimos que *<a, $_e$neut(a)>*, donde *a*, y su neutro extendido *$_e$neut(a)* pertenecen a *D*, tal que:
1) *$_e$neut(a)* puede ser igual o diferente del elemento unitario de *D* con respecto a la ley # (si la hay);
2) $a \# {}_e neut(a) = {}_e neut(a) \# a = a$;
3) no existe un opuesto extendido *$_e$anti(a)* perteneciente a *D* para el cual $a \# {}_e anti(a) = {}_e anti(a) \# a = {}_e neut(a)$.

54. Definición de Topología de Dupla Extendida Neutrosófica de Valor Único

Sea $U_{Extended-Duplet}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un Conjunto de Dupla Neutrosófica Extendida, y $P(U_{Extended-Duplet})$ el conjunto d potencias de $U_{Extended-Duplet}$.

Sea $\tau_{Extended-Duplet} \subseteq P(U_{Extended-Duplet})$ una familia de conjuntos de duplas neutrosóficas de valor único de $U_{Extended-Duplet}$.

Entonces $\tau_{Extended-Duplet}$ se llama Topología de dupla neutrosófica de valor único en $U_{Extended-Duplet}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{Extended-Duplet}$ pertenecen a $\tau_{Extended-Duplet}$.
ii. La intersección de cualquier número finito de conjuntos de duplas neutrosóficas extendidas de valor único en $\tau_{Extended-Duplet}$ es en $\tau_{Extended-Duplet}$.
iii. La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos de duplas neutrosóficas extendidas de valor único en $\tau_{Extended-Duplet}$ es en $\tau_{Extended-Duplet}$.

Entonces $(U_{Extended-Duplet}, \tau_{Extended-Duplet})$ se denomina Espacio Topológico de Dupla Extendida Neutrosófica.

55. Definición de MultiConjunto Neutrosófico

Florentin Smarandache presentó los MultiConjuntos Neutrosóficos y las Estructuras Algebraicas de MultiConjuntos Neutrosóficos [23, 24, 26] en 2016.
Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso, y un conjunto $M \subseteq U$.

Un *MultiConjunto Neutrosófico* M es un conjunto neutrosófico donde uno o más elementos se repiten con los mismos componentes neutrosóficos, o con diferentes componentes neutrosóficos.

Es una extensión del multiconjunto clásico, multiconjunto difuso, multiconjunto difuso intuicionista, etc.

56. Ejemplos de MultiConjuntos Neutrosóficos

A= $\{a(0,6, 0,3, 0,1), b(0,8, 0,4, 0,2), c(0,5, 0,1, 0,3)\}$
es un conjunto neutrosófico (no multiconjunto).

Pero B= $\{a(0,6, 0,3, 0,1), a(0,6, 0,3, 0,1), b(0,8, 0,4, 0,2)\}$
es un multiconjunto neutrosófico, ya que el elemento *a* se repite; decimos que el elemento a tiene la *multiplicidad neutrosófica* 2 con los mismos componentes neutrosóficos.

Mientras C= $\{a(0,6, 0,3, 0,1), a(0,7, 0,1, 0,2), a(0,5, 0,4, 0,3), c(0,5, 0,1, 0,3)\}$
también es un multiconjunto neutrosófico, porque el elemento *a* se repite (tiene la *multiplicidad neutrosófica* 3), pero con diferentes componentes neutrosóficos, ya que, por ejemplo, durante el tiempo, la pertenencia neutrosófica de un elemento puede cambiar.

Si el elemento a se repite k veces, manteniendo los mismos componentes neutrosóficos (ta, ia, fa), decimos que *a* tiene *multiplicidad* k.
Pero si hay algún cambio en los componentes neutrosóficos de *a*, decimos que *a* tiene la *multiplicidad neutrosófica* k.
Por tanto, definimos de forma general la *Función de Multiplicidad Neutrosófica* (*nm*):

$$nm: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\},$$

y para cualquier $a \in A$ se tiene

$$nm(a) = \{(k_1, \langle t_1, i_1, f_1\rangle), (k_2, \langle t_2, i_2, f_2\rangle), \ldots, (k_j, \langle t_j, i_j, f_j\rangle), \ldots\}$$

Lo que significa que
a se repite k_1 veces con los componentes neutrosóficos $\langle t_1, i_1, f_1\rangle$;
a se repite k_2 veces con los componentes neutrosóficos $\langle t_2, i_2, f_2\rangle$,
...,
a se repite k_j veces con los componentes neutrosóficos $\langle tj, ij, fj\rangle$,
...,
etcétera.

Entonces, un multiconjunto neutrosófico *A* se puede escribir como:
A = $\{(a, nm(a))$, para $a \in A)\}$.

57. Ejemplos de operaciones con Multiconjuntos Neutrosóficos

Tengamos:

A= {5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,4, 0,1, 0,3⟩ , 6 ⟨0,2, 0,7, 0,0⟩ };
B= {5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,8, 0,1, 0,1⟩ , 6 ⟨0,9, 0,0, 0,0⟩ };
C= {5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ }.

Entonces:

Intersección de multiconjuntos neutrosóficos.
$A \cap B$= {5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ }.

Unión de multiconjuntos neutrosóficos
$A \cup B$={5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,6, 0,3, 0,2⟩ , 5 ⟨0,4, 0,1, 0,3⟩ , 5 ⟨0,8, 0,1, 0,1⟩ , 6 ⟨0,2, 0,7, 0,0⟩ , 6 ⟨0,9, 0,0, 0,0⟩ }.

Inclusión de multiconjuntos neutrosóficos
$C \subset A$, pero $C \not\subset B$.

58. Definición de Topología Neutrosófica Multiconjunto de Valor Único

Sea $U_{MultiSet}$ un Universo de Discurso que tiene la estructura de un MultiConjunto Neutrosófico, y $P(U_{MultiSet})$ el conjunto de potencias de $U_{MultiSet}$.

Sea $\tau_{MultiSet} \subseteq P(U_{MultiSet})$ una familia de multiconjuntos neutrosóficos de valor único de $U_{MultiSet}$.

Entonces $\tau_{MultiSet}$ se llama Topología Neutrosófica MultiConjunto de valor Único en $U_{MultiSet}$ si satisface los siguientes axiomas:

i. ϕ y $U_{MultiSet}$ pertenecen a $\tau_{MultiSet}$.

ii. La intersección de cualquier número finito de multiconjuntos neutrosóficos de valor único en $\tau_{MultiSet}$ está en $\tau_{MultiSet}$.

iii. La unión de cualquier número finito o infinito de multiconjuntos neutrosóficos de valor único r en $\tau_{MultiSet}$ está en $\tau_{MultiSet}$.

Entonces $(U_{MultiSet}, \tau_{MultiSet})$ se denomina Espacio Topológico Neutrosófico MultiConjunto.

Conclusión

Estas ocho nuevas topologías vanguardistas, junto con las seis nuevas topologías anteriores y sus correspondientes espacios topológicos, fueron introducidas por Smarandache entre 2019 y 2023, pero aún no han sido muy estudiadas ni aplicadas, excepto las NeutroTopologías y AntiTopologías, que han recibido cierta atención por parte de los investigadores. Mientras tanto, la Topología Neutrosófica No Estándar, las Topologías de Triplete Neutrosófico Débil/Fuerte, las Topologías Neutrosóficas Extendidas de Tripletes Débil/Fuerte, la Topología Neutrosófica de Dupla, la Topología Neutrosófica Extendida de Dupla y la Topología Neutrosófica de Multiconjuntos se proponen ahora por primera vez.

Como investigación futura, se estudiaría sus amplias aplicaciones en nuestro mundo real.

Referencias

[1] F. Smarandache, n-valued Refined Neutrosophic Set and Logic and its Applications in Physics, Progress in Physics, 143-146, Vol. 4, 2013, https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1407/1407.1041.pdf and http://fs.unm.edu/RefinedNeutrosophicSet.pdf

[2] A.A. Salama, F. Smarandache, Neutrosophic Crisp Set Theory, Educational Publisher, Columbus, Ohio, USA, 2015; http://fs.unm.edu/NeutrosophicCrispSetTheory.pdf

[3] Florentin Smarandache, Refined Neutrosophic Crisp Set (RNCS), in the book Nidus Idearum, pp. 114-116, Vol. VII, third edition, 2019, Editions Pons, Brussels, Belgium; Nidus Idearum book: http://fs.unm.edu/NidusIdearum7-ed3.pdf
Refined Neutrosophic Crisp Set (RNCS) – chapter: http://fs.unm.edu/RefinedNeutrosophicCrispSet.pdf

[4] F. Smarandache, NeutroAlgebra & AntiAlgebra are generalizations of classical Algebras, http://fs.unm.edu/NA/NeutroAlgebra.htm and http://fs.unm.edu/NeutroAlgebra-general.pdf, 2019-2022.

[5] Florentin Smarandache, Structure, NeutroStructure, and AntiStructure in Science, International Journal of Neutrosophic Science (IJNS), Volume 13, Issue 1, PP: 28-33, 2020; http://fs.unm.edu/NeutroStructure.pdf

[6] F. Smarandache, The SuperHyperFunction and the Neutrosophic SuperHyperFunction, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 49, 2022, pp. 594-600, http://fs.unm.edu/NSS/SuperHyperFunction37.pdf

[7] F. Smarandache, New Types of Topologies and Neutrosophic Topologies, Neutrosophic Systems with Applications, pp. 1-3, Vol. 1, 2023, http://fs.unm.edu/TT/NewTypesTopologies.pdf
[8] Tomasz Witczak, Interior and closure in anti-minimal and anti-biminimal spaces, Neutrosophic Sets and Systems, 429-440, Vol. 56, 2023, https://fs.unm.edu/NSS/InteriorClosure29.pdf
[9] Abraham Robinson, Non-Standard Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
[10] Insall, Matt and Weisstein, Eric W. "NonStandard Analysis." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NonStandardAnalysis.html
[11] Insall, Matt. "Transfer Principle." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. http://mathworld.wolfram.com/TransferPrinciple.html
[12] Florentin Smaradache, Advances of Standard and NonStandard Neutrosophic Theories, PONS Publishing House Brussels, Belgium, 2019, https://fs.unm.edu/AdvancesOfStandardAndNonStandard.pdf
[13] Florentin Smarandache, A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics (sixth edition), Books on Demand, ProQuest Information & Learning (University of Microfilm International), Ann Arbor, MI, USA, 1998- 2007, https://fs.unm.edu/eBook-Neutrosophics6.pdf (sixth edition online).
[14] Florentin Smarandache, About NonStandard Neutrosophic Logic (Answers to Imamura 'Note on the Definition of Neutrosophic Logic'), pp. 1-16, Cornell University, New York City, USA, (Submitted on 24 Nov 2018 (v1), last revised 13 Feb 2019 (this version, v2))
Abstract: https://arxiv.org/abs/1812.02534v2,
Full paper: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1812/1812.02534.pdf
[15] Florentin Smarandache, A Geometric Interpretation of the Neutrosophic Set – A Generalization of the Intuitionistic Fuzzy Set, 2011 IEEE International Conference on Granular Computing, edited by TzungPei Hong, Yasuo Kudo, Mineichi Kudo, Tsau-Young Lin, Been-Chian Chien, Shyue-Liang Wang, Masahiro Inuiguchi, GuiLong Liu, IEEE Computer Society, National University of Kaohsiung, Taiwan, 602-606, 8-10 November 2011, http://fs.unm.edu/IFS-generalized.pdf
[16] Florentin Smarandache, Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset / Similarly for Neutrosophic Over-/Under-/OffLogic, Probability, and Statistics, Pons Editions, Brussels, Belgium, 170 pages book, 2016, https://fs.unm.edu/NeutrosophicOversetUndersetOffset.pdf
[17] F. Smarandache, Operators on Single-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Undersets, and Neutrosophic Offsets, Journal of Mathematics and Informatics, Vol. 5, 2016, pp. 63-67, 29 June 2016, https://fs.unm.edu/SVNeutrosophicOverset-JMI.pdf
[18] F. Smarandache, Interval-Valued Neutrosophic Oversets, Neutrosophic Undersets, and Neutrosophic Offsets, International Journal of Science and Engineering Investigations, Vol. 5, Issue 54, pp. 1-4, July 2016, https://fs.unm.edu/IV-Neutrosophic-Overset-Underset-Offset.pdf
[19] Florentin Smarandache, Degrees of Membership > 1 and < 0 of the Elements with Respect to a Neutrosophic OffSet, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 12, pp. 3-8, 2016, https://fs.unm.edu/NSS/DegreesOf-Over-Under-Off-Membership.pdf
[20] Florentin Smarandache and Mumtaz Ali, Neutrosophic Triplet Group, Neural Computing and Applications, Springer, 1-7, 2016, https://link.springer.com/article/10.1007/s00521-016-2535-x; DOI: 10.1007/s00521-016-2535-x.
[21] F. Smarandache, M. Ali, Neutrosophic triplet as extension of matter plasma, unmatter plasma, and antimatter plasma, 69th annual gaseous electronics conference, Bochum, Germany, Veranstaltungszentrum & Audimax, Ruhr-Universitat, 10–14 Oct. 2016, http://meetings.aps.org/Meeting/GEC16/Session/HT6.111
[22] Florentin Smarandache, Mumtaz Ali, The Neutrosophic Triplet Group and its Application to Physics, presented by F. S. to Universidad Nacional de Quilmes, Department of Science and Technology, Bernal, Buenos Aires, Argentina, 02 June 2014.
[23] F. Smarandache, Neutrosophic Perspectives: Triplets, Duplets, Multisets, Hybrid Operators, Modal Logic, Hedge Algebras. And Applications. Pons Editions, Bruxelles, Belgium, second edition, 323 p., 2017; http://fs.unm.edu/NeutrosophicPerspectives-ed2.pdf
[24] F. Smarandache, *Neutrosophic Theory and Applications*, Le Quy Don Technical University, Faculty of Information technology, Hanoi, Vietnam, 17th May 2016.
[25] Florentin Smarandache, *Neutrosophic Duplet Structures*, Joint Fall 2017 Meeting of the Texas Section of the APS, Texas Section of the AAPT, and Zone 13 of the Society of Physics Students, The University of Texas at Dallas, Richardson, TX, USA, October 20-21, 2017, http://meetings.aps.org/Meeting/TSF17/Session/F1.32
[26] F. Smarandache, *Neutrosphic Multiset Applied in Physical Processes*, Actualization of the Internet of Things, a FIAP Industrial Physics Conference, Monterey, California, Jan. 2017.

[27] F. Smarandache, *Neutrosophic Theory and Applications*, Le Quy Don Technical University, Faculty of Information technology, Hanoi, Vietnam, 17th May 2016.
[28] F. Smarandache, M. Ali, *Neutrosophic Triplet Ring and its Applications*, (Log Number: NWS17-2017-000062), 18th Annual Meeting of the APS Northwest Section, Pacific University, Forest Grove, OR, USA, June 1-3, 2017, http://meetings.aps.org/Meeting/NWS17/Session/D1.2
[29] Mohammed A. Al Shumrani and Florentin Smarandache, *Introduction to Non-Standard Neutrosophic Topology*, Symmetry 2019, 11, 0, pp. 1-14, https://fs.unm.edu/neut/IntroductionToNonStandard.pdf

Recibido: noviembre 14, 2023. **Aceptado:** diciembre 01, 2023